§18 Elementare Funktion

Es geht im Wesentlichen darum, Log als Umkehrung von exp zu beschreiben und das zu verallgemeinern. Es geht auch um weitere Winkelfunktionen die aber (zum Glück) mit Log in Verbindung stehen.
Es handelt sich also in diesem Paragraphen um einen Anschlussparagraphen zu §16 „Winkelsatz". Es werden eine Reihe von Ergebnissen zusammengetragen, die wir schon kennen, und diese werden moderat verallgemeinert.

Zunächst zum komplexen Logarithmus:

(18.1) Def. $U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $U \neq \emptyset$. 18-2

$1°$ Ein Zweig des Logarithmus auf U ist eine stetige Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit $\exp g = \mathrm{id}_U$, also $e^{g(z)} = z$ für alle $z \in U$.

$2°$ $\mathcal{C}^*(U) := \{ f \in \mathcal{C}(U) : f(U) \subset \mathbb{C}^* \}$ sei die Menge aller stetigen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ ohne Nullstelle. Dann heißt $g : U \to \mathbb{C}$ Logarithmus von f, wenn g stetig ist und $f = \exp g$ erfüllt.

Ein Zweig des Logarithmus auf U ist also ein Logarithmus von $\mathrm{id}_U = f$.

(18.2) Bemerkungen, Beispiele. $U \subset \mathbb{C}$ offen, $U \neq \emptyset$.

$1°$ Ist g ein Zweig des Logarithmus, so ist $U \subset \mathbb{C}^*$.

$2°$ Ist g Logarithmus von $f \in \mathcal{C}^*(U)$ und U ein

Gebiet, so ist

$$\{g + 2\pi i k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

die Gesamtheit aller Logarithmen von f.

3° $\mathcal{O}^*(U) := \mathcal{O}(U) \cap \mathcal{C}^*(U)$. Sei $f \in \mathcal{O}^*(U)$ und $g : U \to \mathbb{C}$ ein Logarithmus von f. Dann gilt $g \in \mathcal{O}(U)$.

[Beweis mit §16. Sei $a \in U$ & $b = g(a)$. exp hat Ableitung $\exp'(b) = \exp b \neq 0$. Also lokal hol. Umkehrung h, $h(e^w) = w$, $w \in V$, V off. Umg. von b.
$h \circ f(z) = g(z)$, $z \in W$, W off. Umg. von a. Also g hol. in W.
Natürlich können wir auch einen der Zweige Log_k des Logarithmus auf $\mathbb{C}^{**}$ von früher als h nehmen.]

4° Ein Zweig $g : U \to \mathbb{C}$ des Logarithmus auf U ist also globale Umkehrfunktion von $\exp|_{g(U)} : g(U) \to \mathbb{C}$.

Denn g ist holomorph nach 3° und injektiv
sowieso: $z \neq z' \Rightarrow e^{g(z)} = z \neq z' = e^{g(z')}$, also $g(z) \neq g(z')$.
Nach (16.1) hat g die Umkehrfunktion $g^{-1} : g(U) \to U$ mit $g^{-1}(w) = \exp w$ für alle $w \in g(U)$, weil $w = g(z)$.
Daher $g^{-1} = \exp|_{g(U)}$.

5° Konkreter und gut bekannt: Auf dem Streifen

$$\mathring{S}_y := \mathbb{R} \times]y, y + 2\pi[, \quad y \in \mathbb{R},$$

ist exp injektiv. Auf verschiedene Weise haben wir (§6) gesehen, dass $\left(U_y = \exp(\mathring{S}_y) = \mathbb{C} \setminus \{re^{iy} : r \geq 0\}\right)$ die Umkehrfunktion von $\exp|_{\mathring{S}_y}$,

$$\mathrm{Log}_y : U_y \to \mathring{S}_y, \quad z \mapsto \log|z| + i \arg_y z$$

analytisch ist. Log_y ist also ein Zweig des Logarithmus auf U_y und alle solchen Zweige sind durch

$\mathrm{Log}_y + 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$, gegeben.

6° Noch konkreter: Im Falle $U_{-\pi} = \mathbb{C}^{**}$, wird $\mathrm{Log} := \mathrm{Log}_{-\pi}$ der Hauptzweig des komplexen Logarithmus genannt und $\mathrm{Log}_k := \mathrm{Log} + 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$, für die anderen Zweige. (Kleine Inkonsistenz in der Notation!)

Log wird durch jede der folgenden vier Eigenschaften definiert

i) $\mathrm{Log}: \mathbb{C}^{**} \to \mathbb{C}$ ist stetige (oder holomorphe) Umkehrfunktion von $\exp|_{\mathbb{R}\times]-\pi,\pi[} : \mathbb{R}\times]-\pi,\pi[\to \mathbb{C}^{**}$.

ii) $\mathrm{Log}\, z := \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta}$, $z \in \mathbb{C}^{**}$.

$z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (z-1)^n$

iii) $\mathrm{Log}\, z$ ist analytische Fortsetzung von $D(1,1)$ nach $\mathbb{C}^{**}$ der konvergenten Potenzreihe.

iv) $\mathrm{Log}: \mathbb{C}^{**} \to \mathbb{C}$ ist die analytische Fortsetzung des „reellen" Logarithmus $\log:]0,\infty[\to \mathbb{R}$.

(18.3) Satz: $f \in \mathcal{O}^*(G)$ für Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1° f hat einen Logarithmus.

2° $\frac{f'}{f}$ hat eine Stammfunktion

3° $\int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 0$ für alle geschlossenen Wege in G.

Bew. „2° $\iff$ 3°" stets für $h(z)$, hier $h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$

„1° $\Rightarrow$ 2°": $f = e^g$ bedeutet $f' = g'e^g = g'f$. Also ist g Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$.

„2° $\Rightarrow$ 1°" Sei g eine Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$.

Dann gilt: $(fe^{-g})' = f'e^{-g} + fe^{-g}(-g') = e^{-g}(f' - g'f) = 0$

Also ist $fg^{-1} = c$ konstant mit $c \neq 0$, weil $f \in \mathcal{O}^*(G)$. Wir finden $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $c = e^{\lambda}$ und es ist schließlich 18-7

$$f = \exp(g+\lambda).$$

$g+\lambda$ ist Logarithmus von f.

(18.4) Def: „n-te Wurzel". $U \neq \emptyset$ offen & $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1° Ein Zweig der n-ten Wurzel auf U ist eine stetige Funktion $g: U \to \mathbb{C}$ mit $g^n = id_U$.

2° Sei $f \in \mathcal{C}(U)$. $g: U \to \mathbb{C}$ heißt n-te Wurzel von f, wenn $g \in \mathcal{C}(U)$ und $g^n = f$.

(18.5) Bem. / Beispiele:

1° Ein Zweig der n-ten Wurzel auf U ist immer holomorph (und n-te Wurzel von id_U).

2° Es sei $g: U \to \mathbb{C}$ Zweig der n-ten Wurzel auf einem Gebiet G. Dann ist jeder andere Zweig von der Form $\varepsilon_j g$, $j = 1, \dots n$, wobei $\varepsilon_j := \exp(\frac{1}{n} 2\pi i j)$ die j-te Einheitswurzel ist. 18-8

3° $g: U \to \mathbb{C}$ sei Zweig des Logarithmus auf U. Dann ist $h(z) := \exp(\frac{1}{n} g(z))$, $z \in U$, Zweig der n-ten Wurzel.

4° Analog: $g: U \to \mathbb{C}$ Logarithmus von $f \in \mathcal{O}^*(G)$ $\Rightarrow$ $h = \exp(\frac{1}{n} g)$ n-te Wurzel von f.

5° ...

(18.6) (Allgemeine Potenzen). $U \subset \mathbb{C}^*$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Sei g ein Zweig des Logarithmus auf U, $g: U \to \mathbb{C}$. Setze

$$z^{\alpha} := \exp(\alpha g(z)), \quad z \in U.$$

$z \mapsto z^{\alpha}$

ist holomorph und $(z^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} = z$ $\quad (\alpha \neq 0)$

„α-te Potenz"

1° z^{α} „eindeutig" bis auf Faktoren $e^{\alpha 2\pi i k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2° $\alpha = n$ wie gehabt, $\alpha = \frac{1}{n}$, siehe Wurzel

3° $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$: Die „übliche" Potenz $z^{\alpha} = (z^{p})^{\frac{1}{q}}$.

4° Auf $U = D(1,1)$ sei $g = \mathrm{Log}|_U$ der Hauptzweig des Logarithmus. Dann (bekannt)

$$z^{\alpha} = B_{\alpha}(z-1) = \sum \binom{\alpha}{n}(z-1)^n, \quad z \in D(1,1).$$

(18.7) Umkehrfunktion des Tangens (Rückschau):

Die Möbiustransformation

$$g(z) := \frac{1+iz}{1-iz}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$$

ist holomorph und injektiv, insbesondere auch in $\mathbb{E}$.

Es gilt $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \, \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{1}{i} \, \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$ 18-10

und $\zeta \mapsto \frac{1}{i} \, \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} = g^{-1}(\zeta)$ ist die Umkehrung von g.

Also $\tan = g^{-1} \circ f$, $f(z) = e^{2iz}$. f ist auf $G := \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}$ injektiv, also ist $\tan : G \to \mathbb{C}$ umkehrbar. Es ist

$$f(G) = \mathbb{C}^{**} \quad \& \quad g^{-1}(\mathbb{C}^{**}) = H = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq ti \text{ für } |t| \geq 1\}$$
$$= \mathbb{C} \setminus \{ti : |t| \geq 1\}$$

Also $\arctan w = \frac{1}{2i} \mathrm{Log} \frac{1+iw}{1-iw}$

$\arctan : H \to G$

(18.8) Umkehrfunktion von sin.

Wieder auf G und analog $\arcsin w = \frac{1}{i} \mathrm{Log}(iw + \sqrt{1-w^2})$

$w \in \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : |t| \geq 1\}$.

Analog sind etc. oder über Identitäten

$$|g(z,t) - g(z',t')| < \varepsilon.$$ P-2

Jetzt sei $n > 0$ so groß, dass $\frac{1}{n} < \delta$. Für $z \in K$ ist

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(g(z,\tfrac{k}{n}) - g(z,t)\right) dt \right|$$
$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sup\left\{ |g(z,\tfrac{k}{n}) - g(z,t)| : z \in K, |t - \tfrac{k}{n}| < \delta \right\} \leq \varepsilon$$

Also $\|f_n - f\|_K < \varepsilon$ für n mit $\frac{1}{n} < \delta$ $\left(n > \frac{1}{\delta}\right)$

Analog: $f_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{\partial g}{\partial z}(z, \frac{k}{n}) \longrightarrow \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial z}(z,t)\, dt$

(Bemerkung: Die Stetigkeit von $\frac{\partial g}{\partial z}$ brauchen wir hier, um das Integral
$$\int \frac{\partial g}{\partial z}(z,t)\, dt$$
zu definieren. Mit allgemeineren Integralbegriffen funktioniert der Beweis mit schwächeren Annahmen.)

SATZ (Parameterintegral). Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und P-1
$g : U \times [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig. Für jedes $t \in [0,1]$ sei
$z \longmapsto g(z,t)$ holomorph mit stetiger Ableitung $\frac{\partial g}{\partial z}(z,t)$.
Dann ist
$$f(z) := \int_0^1 g(z,t)\, dt, \quad z \in U,$$
holomorph mit $f'(z) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial z}(z,t)\, dt$.

Beweis: Setze $f_n(z) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} g(z, \frac{k}{n})$. Nach Def. des Integrals gilt
$$f_n(z) \longrightarrow f(z) \quad \text{für jedes } z \in U.$$
Zeige: Konvergenz ist kompakt, dann ist f holomorph.
Dazu sei $K \subset U$ kpt. g ist glm. stetig auf $K \times [0,1]$.
Also ex. zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$: $\left.\begin{array}{l}|z - z'| < \delta, |t - t'| < \delta \\ (z,t), (z',t') \in K \times [0,1]\end{array}\right\} \Rightarrow$